Μαθημα 3ο 7/4/2018

Ολοκληρωτικες

Ασκηση

Να λυσετε την ολοκληρωτικη εξισωση

$$\cos t = 1 + \int_0^t (t-s)\, y(s)\, ds.$$

α' τροπος: χρηση Laplace

β' τροπος: παραγωγιζω και τη φερνω σε πιο ευκολη μορφη

~~Ασκηση~~ 1

Να δειξετε οτι ο τελεστης

$$Ly(t) = (1-t^2)\, y''(t) - 2t\, y'(t) + u(u+1)\, y \quad , t \in (-1,1)$$

ειναι αυτοσυζυγης

Λυση

$p(t) = (1-t^2)$

$q(t) = -2t$

Αυτοσυζυγης εαν $p'(t) = q(t)$ που πραγματι ισχυει

$$p'(t) = -2t = q(t)$$

και η αυτοσυζυγης μορφη του τελεστη ειναι

$$Ly(t) = ((1-t^2)\, y'(t))' + u(u+1)\, y$$

~~Ασκηση~~ 2

Να μετασχηματιστει η παρακατω ομογενης γρ Δ.Ε σε μια ισοδυναμη αυτοσυζυγης

$$x y''(x) + (\log x)\, y'(x) + x y(x) = 0 \quad , x > 0$$

Λυση

$p(x) = x$

$q(x) = \log x$

$p'(x) = 1 \neq \log x = q(x)$

Πολλαπλασιαζω με μια συναρτηση $\kappa(x)$ ωστε να προκυψει αυτοσυζυγης τελεστης

δηλαδη

$$\kappa(x)\, x\, y''(x) + \kappa(x)\,(\log x)\, y'(x) + \kappa(x)\cdot x\, y(x) = Ly(x)$$

Ο τελεστης θελουμε να ειναι αυτοσυζυγης, οποτε θα ισχυει

$$(\kappa(x)\, x)' = \kappa(x) \log x \quad , x>0$$

$$\kappa'(x)\, x + \kappa(x) = \kappa(x)\log x \quad , x>0$$

$$\kappa'(x)\cdot x + (1-\log x)\,\kappa(x) = 0 \quad , x>0$$

$$\kappa'(x) + \left(\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}\right)\kappa(x) = 0 \quad , x>0$$

Που ειναι ομογενης γραμμικη Δ.Ε $1^{ης}$ ταξης, οποτε

$$\kappa(x) = c\, \exp\left[-\int \left(\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}\right) dx\right]$$

$$= c\, \exp\left[-\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{\log x}{x}\, dx\right]$$

$$= c\, \exp\left[\int (\log x)' \log x\, dx\right]$$

$$= c\, \frac{1}{x}\, \exp\left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]$$

οποτε τωρα

$$p(x) = \kappa(x)\, x = c\, \exp\left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]$$

εβαλα $c=1$ επιλεγω οποια τιμη θελω

$$Q(x) = \kappa(x) \log x = \frac{1}{x} \log x\, \exp\left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]$$

Ασκηση 2

Να βρειτε τις ιδιοτιμες και τις αντιστοιχες ιδιοσυναρτησεις για το προβλημα συνοριακων τιμων

$y''(t) + \lambda y(t) = 0 \quad , \quad 0 < t < a \quad , \quad a > 0$

με συνοριακες συνθηκες

$y'(0) = 0 \quad , \quad y'(a) = 0$

Λυση

Η Δ.Ε ειναι της μορφης: $(py')' + (q + \lambda r) y = 0$

οπου $p(t) = 1$

$q(t) = 0$

$r(t) = 1$

Διακρινουμε τις εξης περιπτωσεις

1) $\lambda = 0$

Τοτε η Δ.Ε παιρνει τη μορφη

$y''(t) = 0$

Βασικο συνολο λυσεων

$e^0 = 1$ και $te^0 = t$

οποτε οι λυσεις της ειναι της μορφης

$y(t) = c_1 + c_2 \cdot t$

Απο τις συνοριακες συνθηκες εχουμε

$y'(t) = c_2$ και $y'(0) = 0$ αρα $c_2 = y'(0) \Rightarrow c_2 = 0$

Επισης

$y'(a) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Αρα οι λυσεις που ικανοποιουν το Π.Σ.Τ για $\lambda = 0$ ειναι

$y(t) = c_1$ οπου c σταθερα

οποτε οι ιδιοσυναρτησεις που αντιστοιχουν στην ιδιοτιμη $\lambda = 0$ ειναι

$y(t) = c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) $\lambda < 0$

Τοτε το χαρακτηριστικο πολυωνυμο ειναι

$$k^2 + \lambda = 0$$

και λυσεις ειναι

$$k_1 = \sqrt{-\lambda} \quad \text{και} \quad k_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

Αρα βασικο συνολο λυσεων

$$\{ e^{\sqrt{-\lambda}\cdot t}, e^{-\sqrt{-\lambda}\, t} \}$$

Ενω οι λυσεις της Δ.Ε θα δινονται απο τη σχεση

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\cdot t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot t}$$

οποτε

$$y'(t) = c_1 \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\cdot t} - c_2 \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, t}$$

και απο τις συνοριακες συνθηκες εχω

$$0 = y'(0) \Rightarrow 0 = c_1(\sqrt{-\lambda}) - c_2\sqrt{-\lambda} \Rightarrow \boxed{c_1 = c_2}$$

Επισης

$$0 = y'(a) \Rightarrow c_1 \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\cdot a} - c_1 \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, a}$$

$$\Rightarrow c_1 \sqrt{-\lambda}\, (e^{\sqrt{-\lambda}\, a} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, a}) = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \sqrt{-\lambda} \left(\frac{(e^{\sqrt{-\lambda}\, a})^2 - 1}{e^{\sqrt{-\lambda}\, a}} \right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$-\lambda < 0, \quad a > 0$$

Επομενως $c_1 = c_2 = 0$ και $y(t) = 0$ και $y(t)$ δεν ειναι ιδιοσυναρτηση διοτι μηδενικη

3) $\lambda > 0$

Τοτε η χαρακτηριστικη εξισωση

$$k^2 + \lambda = 0 \quad \text{εχει} \quad \Delta = -4\lambda < 0$$

και εχει δυο μιγαδικες λυσεις

$$k_1 = i\sqrt{\lambda}, \quad k_2 = -i\sqrt{\lambda}$$

και βασικο συνολο λυσεων

$$\{ \cos\sqrt{\lambda}\, t, \sin\sqrt{\lambda}\, t \}$$

οπότε γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$$

Συνεπώς

$$y'(t) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\, t + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\, t$$

και από τις συνοριακές τιμές προκύπτει

$0 = y'(0) \Rightarrow -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0 + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ $\quad \lambda > 0$

Επίσης

$0 = y'(a) \Rightarrow -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot a = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ ή $\sin\sqrt{\lambda}\cdot a = 0$

$\sin\sqrt{\lambda}\, a = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\, a = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \overset{a>0}{\Rightarrow} \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{a} \overset{\lambda>0}{\Rightarrow} \lambda = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$

Άρα $\lambda_k = \frac{k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

και οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές είναι

$$y_k(t) = \cos\sqrt{\lambda}\, t = \cos\frac{k\pi}{a}\cdot t$$

Άσκηση 3

Α) Να μετατρέψετε το παρακάτω ΠΣΤ σε ένα πρόβλημα Sturm-Liouville

$$y''(t) - 2y'(t) + \lambda y(t) = 0, \quad 0 \le t \le \pi$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Β) Να βρείτε ιδιοτιμή και ιδιοσυναρτήσεις

Α) Έχουμε $p(t) = 1$, $q(t) = -2$

Πολλαπλασιάζουμε με την κατάλληλη συνάρτηση $k(t)$ ώστε να προκύψει αυτοσυζυγής τελεστής

$$k(t) = \frac{c}{p(t)} \exp\left(\int_0^t \frac{q(s)}{p(s)}\, ds\right)$$

οπότε αν

$$k(t) = \frac{1}{1} \exp\left(\int_0^t -2\, ds\right) = e^{-2t}$$

Scanned by CamScanner

Εχουμε την ισοδυναμη Δ.Ε

$$e^{-2t}y''(t) - 2e^{-2t}y'(t) + e^{-2t}\lambda y(t) = 0$$

ή

$$(e^{-2t}y'(t))' + \lambda e^{-2t} y(t) = 0$$

Αναζητασμε λυσεις για τις διαφορες τιμες του λ. Αναζητω λοιπον τις λυσεις της ισοδυναμης αρχικης Δ.Ε με χαρακτηριστικο πολυωνυμο : $k^2 - 2k + \lambda = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\lambda = 4(1-\lambda)$$

Διακρινω περιπτωσεις

1) $\lambda = 1$

Τοτε $\Delta = 0$ δηλ το χαρακτηριστικο πολυωνυμο θα εχει μια (διπλη) ριζα $k_0 = \frac{2}{2} = 1$

και βασικο συνολο λυσεων $\{e^t, te^t\}$

Γενικη λυση

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

Εξεταζω τις συνοριακες συνθηκες

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 \cdot 0\, e^0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow 0 + c_2 \cdot \pi e^{\pi} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Αρα δεν εχω μη μηδενικες λυσεις για αυτη τη περιπτωση

2) $\lambda < 1$

Τοτε $\Delta = 4(1-\lambda) > 0$

Εχουμε δυο πραγματικες ριζες

$$k_1 = 1 + \sqrt{1-\lambda}, \quad k_2 = 1 - \sqrt{1-\lambda}$$

αρα βασικο συνολο λυσεων

$$\{e^{k_1 t}, e^{k_2 t}\}$$

Γενικη λυση

$$y(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}$$

και συνοριακές συνθήκες

• $y(0)=0 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

• $y(\pi)=0 \Rightarrow c_1 e^{k_1 \pi} - c_1 e^{k_2 \pi} = 0 \Rightarrow c_1 e^{(1+\sqrt{1-\lambda})\pi} - c_1 e^{(1-\sqrt{1-\lambda})\pi} = 0$

$\Rightarrow c_1 \underbrace{e^{\pi}}_{>0} \underbrace{\left(e^{\sqrt{1-\lambda}\,\pi} - e^{-\sqrt{1-\lambda}\,\pi}\right)}_{>0} = 0 \overset{1-\lambda>0}{\Rightarrow} c_1 = 0$

άρα και $c_2 = 0$

Άρα δεν υπάρχουν ιδιοσυναρτήσεις μικρότερες του 1

3) $\lambda > 1$

Τότε $\Delta = 4(1-\lambda) < 0$

Έχουμε 2 μιγαδικές λύσεις

$k_1 = 1 + i\sqrt{\lambda - 1}$, $k_2 = 1 - i\sqrt{\lambda-1}$

και βασικό σύνολο λύσεων

$\{e^t \cos\sqrt{\lambda-1}\, t,\ e^t \sin\sqrt{\lambda-1}\, t\}$

οπότε

$y(t) = c_1 e^t \cos\sqrt{\lambda-1}\, t + c_2 e^t \sin\sqrt{\lambda-1}\, t$

και από τις συνοριακές συνθήκες

$0 = y(0) \Rightarrow c_1 e^0 \cos\sqrt{\lambda-1}\cdot 0 + c_2 e^0 \sin\sqrt{\lambda-1}\cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$0 = y(\pi) \Rightarrow c_2 e^{\pi} \sin\sqrt{\lambda-1}\,\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda-1}\,\pi = \kappa\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda-1} = \kappa$, $\kappa \neq 0$

Άρα $\lambda_\kappa = \kappa^2 + 1$, $\kappa \neq 0$ (ιδιοτιμές)

και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$y_\kappa(t) = e^t \sin \kappa t$, $\kappa \neq 0$

Συναρτήσεις Green για το πρόβλημα Sturm-Liouville

Θεωρούμε το μη ομογενές πρόβλημα Sturm-Liouville

$$Ly(t) = \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right] + \left[q(t) + \lambda r(t)\right] = f(t)$$

και συνθήκες

$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0$ οπου $c_1^2 + c_2^2 > 0$

$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0$ οπου $d_1^2 + d_2^2 > 0$

οπου

1) Η p εχει συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ και $p(t) > 0$ $\forall t \in [a,b]$

2) Η q είναι συνεχής στο $[a,b]$

3) r, f συνεχης στο $[a,b]$

Η συνάρτηση Green είναι μια συνάρτηση που χρησιμοποιείται για τη λύση μη ομογενών γραμμ. Δ.Ε με συνοριακές συνθήκες της παραπάνω μορφής και η λυση δινεται ως εξής

$$y(t) = \int_a^b \underbrace{G(t,s)}_{\text{συναρτηση Green}} f(s)\,ds$$

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι το ομογενές ΠΣΤ $(E_0) - (C_0)$ εχει μονο τη μηδενική λυση. Τοτε το μη-ομογενές ΠΣΤ

$Lu(t) = h(t)$, $a < t < b$

$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = A$

$d_1 u(b) + d_2 u'(b) = B$

οπου A, B ειναι σταθερές και h συνεχης στο $[a,b]$ εχει μοναδική λυση

Πόρισμα

Υποθέτουμε ότι το ομογενές ΠΣΤ $(E_0)-(C_0)$ έχει μόνο τη μηδενική λύση. Τότε η λύση του μη-ομογενούς ΠΣΤ

$$Lu(t) = h(t) \quad , a < t < b$$
$$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = A$$
$$d_1 u(b) + d_2 u'(b) = B$$

όπου A, B σταθερές και h συνεχής δίνεται από τη σχέση

$$u(t) = w(t) + \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, ds$$

όπου $G(t,s)$ είναι η συνάρτηση Green (που αντιστοιχεί στο ΠΣΤ $(E_0)-(C_0)$) και η w είναι λύση του

$$Lw(t) = 0 \quad , a < t < b$$
$$c_1 w(a) + c_2 w'(a) = A$$
$$d_1 w(b) + d_2 w'(b) = B$$

απόδειξη

Εφόσον $(E_0)-(C_0)$ έχει μόνο τη μηδενική λύση σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το $(E)-(C)$ έχει μοναδική λύση

Εάν $h(t) = w(t) + \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, ds$

τότε εφόσον η $G(t,s)$ είναι το $(E_0)-(C_0)$ έπεται ότι η

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)\, h(s)\, ds \quad \text{είναι λύση του}$$

$$Ly(t) = h(t)$$
$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0$$
$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0$$

Εθέσαμε

$u(t) = w(t) + y(t)$

Έπεται

$Lu(t) = L(w(t) + y(t)) \Rightarrow$

$Lu(t) = Lw(t) + Ly(t) = 0 + h(t) = h(t)$

Άρα η u ικανοποιεί την Δ.Ε (Ε)

Επιπλέον έχουμε

$u(a) = w(a) + y(a)$ $\quad$ $u'(a) = w'(a) + y'(a)$

$u(b) = w(b) + y(b)$ $\quad$ $u'(b) = w'(b) + y'(b)$

Άρα

$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = c_1 w(a) + c_1 y(a) + c_2 w'(a) + c_2 y'(a) =$

$= c_1 w(a) + c_2 w'(a) + c_1 y(a) + c_2 y'(a) = A + 0 = A$

όμοια και $d_1 u(b) + d_2 u'(b) = \dots = B$

Παρατήρηση

Υπάρχουν ΠΣΤ ομογενή με ομογενείς συνοριακές συνθήκες που έχουν μη μηδενικές λύσεις

Για παράδειγμα θεωρούμε το ΠΣΤ

$(p(t) y'(t))' = 0 \quad , \quad a < t < b \quad (E_0) \quad , \quad p(t) > 0$

και $y'(a) = 0 \quad , \quad y'(b) = 0$

Εδώ $q(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b)$

$c_1 = d_1 = 0 \quad , \quad c_2, d_2 \neq 0$

Από τη Δ.Ε με ολοκλήρωση βρίσκουμε ότι η γενική λύση της είναι η $y(t) = k_1 + \int_a^t \frac{k_2}{p(s)} ds$

από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει

$0 = y'(a) \Rightarrow \frac{k_2}{p(a)} = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

Επισης $y'(b)=0 \Rightarrow \dfrac{k_2}{p(b)} = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

κανενας περιορισμος για την k_1 αρα

$y(t) = k_1 \quad , k_1 \neq 0$

Ειναι μη μηδενικη λυση του ΠΣΤ $(E_0) - (C_0)$